ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS 1982

Mathématiques 2e épreuve (3 h)

PROBLEME N° 1

Les parties I et II sont indépendantes.

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles définies sur un même univers prenant chacune un nombre fini de valeurs, respectivement

$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant \ell}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$.

On suppose que les x_i (resp. y_j) sont deux à deux distinctes.

et on pose, pour tout $(i,j) \in \{1,2,\ldots,\ell\} \times \{1,2,\ldots,m\}$

$p_i = P(X=x_i)$, $q_j = P(Y=y_j)$, $r_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$

$\delta_{ij} = r_{ij} - p_i q_j$

I

1°) Montrer que si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.

2°) Soit U une variable aléatoire réelle qui prend les valeurs -2, -1, 0, 1, 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$. On pose $V=U^2$

a) Déterminer la loi de probabilité conjointe de (U,V) et la loi de probabilité de V.

b) U et V sont-elles indépendantes ?

c) Calculer la covariance de U et de V. Qu'en concluez vous ?

II

Etant donnée une suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels, on considère, pour chaque entier naturel non nul p, le déterminant d'ordre p défini par $\Delta_1 = 1$ et pour $p \geqslant 2$,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \ldots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

où α_i^n désigne la puissance $n^{\text{ième}}$ de α_i

1°) Donner l'expression de Δ_3 sous forme d'un produit de trois facteurs.

2°) Montrer que Δ_p, considéré comme polynôme de la variable α_p est divisible par le produit

$$\prod_{i=1}^{p-1} (\alpha_p - \alpha_i) .$$

3°) En déduire, en considérant le développement de Δ_p par rapport à sa dernière colonne, que Δ_p est nul ou de degré p-1 par rapport à α_p.

4°) Montrer que $\Delta_p = \Delta_{p-1} \times \prod_{i=1}^{p-1} (\alpha_p - \alpha_i)$ puis que Δ_p est non nul si et seulement si les α_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ sont deux à deux distincts.

On suppose que pour tous les entiers h et k tels que $0 \leqslant h \leqslant \ell - 1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$, la covariance des variables aléatoires X^h et Y^k est nulle.

On rappelle que l'espérance du produit $X^h Y^k$ est donnée par :

$$E(X^h Y^k) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, x_i^h\, y_j^k .$$

1°) Montrer que pour $0 \leqslant h \leqslant \ell-1$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\, x_i^h\, y_j^k = 0$.

2°) On pose, pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$, et $1 \leqslant i \leqslant \ell$ $\quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\, y_j^k$.

Déduire de la question précédente que

$(\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \ldots, \gamma_{\ell k})$ est solution du système formé par les équations :

$$\sum_{i=1}^{\ell} \beta_{ik}\, x_i^h = 0 \quad h \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\},$$

où les inconnues sont les β_{ik} , $i \in \{1, 2, \ldots \ell\}$

Montrer en utilisant le résultat du II 4° que pour tout $i \in \{1,2,\ldots \ell\}$ et pour tout $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$\gamma_{ik} = 0.$$

3°) Par une méthode analogue montrer que

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,\ell\} \times \{1, 2\ldots,m\},\ \delta_{ij} = 0 .$$

Quel est l'énoncé de la propriété ainsi établie ?

PROBLEME N° 2

1) Soit g la fonction définie pour $u \in \mathbb{R}^*$ par :

$$g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1}$$

Comment faut-il choisir g(0) pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$?

2) Montrer la convergence de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} g(u)\ du$$

(on ne cherchera pas à calculer J).

3) Soit f la fonction définie par f(0) = 1 et pour $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + x^4 \int_0^{1/x^2} g(u)\ du$$

a) Montrer la continuité de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer pour x non nul la dérivée f'(x) de f.

c) Déterminez le développement limité de f à l'ordre 4, au voisinage de 0, puis le développement limité de f' à l'ordre 3, au voisinage de 0 (on donne $J = \pi^4/15$) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail